臺北市立大理高級中學 112 學年度高中數學科代理教師甄選初試 (筆試) 試題

注意事項：請自行掌握時間分配, 依序書寫於所附答題紙中, 本次考試不再另加答題紙.
未依序作答者, 該題不予計分.

共計 100 分, 填充題共 8 題, 每題 5 分; 計算題 4 題, 每題 15 分.

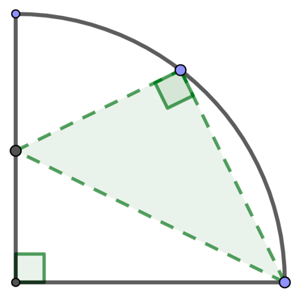
一、填充題：(直接依照題號寫出答案, 不用過程; 共計 40 分, 每題 5 分)

1. 正整數 $m > n$, 若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $\sum_{k=1}^{n} a_k = m$, $\sum_{k=1}^{m} a_k = n$, 則 $\sum_{k=1}^{m+n} a_k = ?$

2. 已知 G 爲 $\triangle ABC$ 的重心, 且 $\overline{BC} = 10$, $\overline{AG} = 4$, 則餘弦值 $\cos \angle BGC$ 的範圍爲何?

3. 空間坐標中有一正立方體, 若點 A、B 分別爲此正立方體兩相異稜邊的中點, 則向量 $\overrightarrow{AB}$ 共有幾種不同的可能?

4. 平面上有半徑爲 1 的四分之一圓與內接三角形如下圖所示, 則三角形面積有最大值時, 斜邊長是多少?



5. 三次多項式函數 $f(x) = x^3 + x^2 + mx + n$ 的函數值 $f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 依序形成等比數列. 則數對 $(m, n) = ?$

6. 非負實數 x 滿足方程式 $(2x)^{\log 2} = (5x)^{\log 5}$, 則 x 的解爲?

7. 考慮所有只用 0, 1, 2 三種數字組成的序列, 序列長度 n 是指該序列由 n 個數字組成 (可重複出現). 令 a_n 爲在所有長度 n 的序列中連續兩個零 (即 00) 出現的次數總和. 則 a_n 的值爲何? $(n \in \mathbb{N})$

8. 有五位選手, 每個人都要和其他四人對戰一次 (循環賽). 假設每個人對上其他對手的勝率都是 50% (各選手實力相當), 則 10 場對戰打完後, 每位選手的成績都是二勝二負的機率是多少?

二、非選題：(共計 60 分, 每題 15 分)

9.「將 4 個球隨機全部放入 6 個箱子, 問每個箱子最多有一個球的機率是多少?」在機率教學中若分別考慮下列四種不同的情形來解題, 請說明您要設計怎樣的教學策略 (情境素養), 讓學生瞭解以下各題的機率的差異?

(1) 顏色皆異的球放入相異的箱子

(2) 完全相同的球放入相異的箱子

(3) 顏色皆異的球放入相同的箱子

(4) 完全相同的球放入相同的箱子

10. 已知複數 x、y、z 滿足等式 $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}=0$,

(1) 若 $y=z$, 則 $(x,y,z)=$?

(2) 計算 $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}$ 之值

(3) 若 $x+y+z\neq 0$, 說明是否存在實數解 x,y,z?

11. 設 $n\geq 2$ 爲給定的正整數. 若集合 $A_n=\{1,2,3,\cdots,2^n\}$ 的子集 B 滿足以下的性質:

『若相異元素 $a,b\in A_n$ 的和爲 2 的整數次方, 則 a、b 二數中恰有一數在集合 B 中』

則稱集合 B 爲 A_n 的一個「良好子集」. 試問集合 A_n 有多少個「良好子集」?
例: $\{1,4\}$ 是 $A_2=\{1,2,3,4\}$ 的一個「良好子集」

12. 已知二階方陣 A、B 滿足 $A+B=I_2$、$AB=O$. 若方陣 $M=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\alpha A+\beta B$ $(\alpha\geq\beta)$, 則實數數對 (α,β) 之值與方陣 A、B 爲何?

臺北市立大理高級中學 112 學年度高中數學科代理教師甄選初試 (筆試) 簡答

初試科目: 高中數學科　　　　　　考試日期: 112 年 7 月 10 日 (一)

1. $-m-n$
2. $\left(-\frac{21}{29},-1\right)$
3. 54
4. $\sqrt{\sqrt{5}-1}$
5. $\left(\frac{2}{3},\frac{8}{9}\right)$
6. $x=0 \vee \frac{1}{10}$
7. $a_n=(n-1)\cdot 3^{n-2}$
8. $\frac{3}{128}$
9. 在「每一個球放入任一箱子的機率相同」且「每一個球放入箱子的事件是獨立的」的條件下, 4 個情況的機率都是 $\frac{P^6_4}{6^4}$
10. (1) $(x,y,z)=(-2t,t,t)$ 或 $(x,y,z)=\left((1\pm\sqrt{7}i)t,t,t\right)$, 其中 $t\neq 0$

    (2) $-3 \vee 1$

    (3) 存在, 例如 $y=1, z=2$ 時, x 爲 $x^3+2x+9=0$ 的唯一實根 (≈ -1.7625)
11. 2^{n+1}
12. $\alpha=5, \beta=-1, A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}, B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$